Общие критерии оценивания

По результатам проверки каждого задания выставляется одна из следующих оценок (перечислены в порядке убывания):
«$+$» — задача решена полностью;
«$\pm$» — задача решена с недочетами, не влияющими на общий ход решения;
«$\mp$» — задача не решена (например, в решении содержатся грубые ошибки), но имеются содержательные продвижения;
«$-$» — задача не решена;
за задачу, к решению которой участник не приступал, ставится оценка «0».

При подведении итогов учитывается только количество в целом решенных задач — задач, за которые поставлена оценка «$+$»или «$\pm$».

Вариант 9–10

Задача 1. Вася и Маша поженились в 1994 году. С тех пор у них родились четверо детей, и новый 2015 год встречали уже все шестеро. По странному совпадению все дети родились 6 февраля, а сегодня, 7 февраля 2016 года, Вася заметил, что возраст старшего равен произведению возрастов трёх младших. Докажите, что в этой семье есть близнецы.

Решение. Заметим, что из условия следует, что сегодня всем детям уже не менее двух лет — они все родились не позднее 6 февраля 2014 года. Предположим, что близнецов нет, тогда возраста всех четырёх детей различны. Тогда произведение возрастов трёх младших не меньше, чем $2 \cdot 3 \cdot 4 = 24$, откуда старшему хотя бы 24 года. Но это противоречит условию. Значит, близнецы в семье есть.

Задача 2. На доске написано число 27. Каждую минуту число стирают с доски и записывают на его место произведение его цифр, увеличенное на 12. Например, через минуту на доске будет написано число $2 \cdot 7 + 12 = 26$. А что окажется на доске через час?

Ответ: 14

Решение. найдём следующие несколько чисел, которые появятся на доске. После 26 будет 24, затем 20, 12, 14, 16, 18 и снова 20. Заметим, что цепочка замкнулась и каждое последующее число будет совпадать со стоящим перед ним на 5 позиций раньше. Тогда через час, то есть 60 минут, будет написано то же, что и через 55 минут, что в свою очередь совпадает с написанным через 50 минут и так далее, вплоть до записанного через 5 минут, то есть числа 14.

Задача 3. Про действительные числа x, y, z известно, что

$$xy + z = yz + x = zx + y.$$

Докажите, что какие-то два из чисел x, y, z равны.

Решение. Предположим, что все три числа различны. Рассмотрим равенство $xy + z = yz + x$. Перенесем все слагаемые в одну часть и разложим на множители, получим $(x - z)(y - 1) = 0$. Раз $x \neq z$, то должно быть выполнено $y = 1$. Рассмотрим теперь другое равенство, например $yz + x = zx + y$. Аналогично получим, что $z = 1$. Но тогда $y = z$.

Задача 4. Трапеция $ABCD$ с основаниями BC и AD такова, что $AC = BC + AD$, а один из углов между прямыми AC и BD равен $60°$. Докажите, что $ABCD$ — равнобокая трапеция.

Решение. Построим точку E на прямой AD так, чтобы CE было параллельно BD. Тогда $BCED$ — параллелограмм. Рассмотрим треугольник ACE. $AC = AD+BC = AD+DE = AE$, угол ACE равен либо $60°$, либо $120°$. Но угол при основании равнобедренного треугольника ACE не может быть тупым, так что $\angle ACE = 60°$, откуда треугольник ACE равносторонний, то есть $AC = CE = BD$. Это означает, что диагонали трапеции равны, а значит она равнобокая.

Второе решение. Построим точку X на диагонали AC так, чтобы $AX = AD, XC = BC$. Рассмотрим образовавшиеся равнобедренные треугольники. $\angle BXC = \frac{180° - \angle BCX}{2} = \frac{180° - \angle XAD}{2} = \angle AXD$, откуда точки B, X и D лежат на одной прямой. Тогда угол BXC является углом между диагоналями, но так как это угол при основании равнобедренного треугольника, то он заведомо острый, так что он равен $60°$. Тогда треугольники BXC и AXD — равносторонние, откуда диагонали трапеции равны, а значит она равнобокая.

Задача 5. У Пети имеется 50 шариков трёх цветов: красные, синие и зелёные. Известно, что среди любых 34 шариков есть хотя бы один красный; среди любых 35 — синий; среди любых 36 — зелёный. Сколько шариков зелёного цвета может быть у Пети?

Ответ: У Пети может быть 15, 16 или 17 зелёных шариков.

Решение. Рассмотрим первое условие. Из того, что среди любых 34 шариков есть хотя бы один красный, следует, что не красных шариков не более 33. Отсюда получаем, что красных шариков не менее $50 - 33 = 17$. Аналогично, синих шариков не менее $50 - 34 = 16$, зелёных шариков не менее $50 - 35 = 15$. Но $17 + 16 + 15 = 48$, так что оставшиеся 2 шарика могут быть любого цвета. Значит зелёных шариков может быть любое количество от 15 до 17.

Задача 6. Найдите все действительные числа x такие, что оба числа $x + \sqrt{3}$ и $x^2 + \sqrt{3}$ — рациональные.

Ответ: $\frac{1}{2} - \sqrt{3}$.

Решение. Обозначим число $x + \sqrt{3}$ через a, а число $x^2 + \sqrt{3}$ через b, тогда $x = a - \sqrt{3}$, $b = (a - \sqrt{3})^2 + \sqrt{3} = a^2 - 2a\sqrt{3} + 3 + \sqrt{3}$. Отсюда получаем $(a^2 + 3 - b) + (1 - 2a)\sqrt{3} = 0$. В правой части стоит рациональное число 0, слагаемое $a^2 + 3 - b$ тоже рационально, значит и $(1 - 2a)\sqrt{3}$ рационально, откуда $1 - 2a = 0$, то есть $a = \frac{1}{2}$. Тогда $x = a - \sqrt{3} = \frac{1}{2} - \sqrt{3}$.

Задача 7. На сторонах AD и BC выпуклого четырехугольника $ABCD$ выбраны точки F и E соответственно таким образом, что $AF/FD = BE/EC = AB/CD$. Продолжение отрезка EF за точку F пересекает прямую AB в точке P, а прямую CD — в точке Q. Докажите, что $\angle BPE = \angle CQE$.

Решение. Построим точки G и H таким образом, что $ABGF$ и $CDFH$ — параллелограммы. Поскольку BG, AD и CH параллельны, $\angle GBE = \angle HCE$. Также, $BG/CH = AF/DF = AB/CD = BE/CE$. Следовательно, треугольники BGE и CHE подобны. Откуда точки G, E и H лежат на одной прямой и $GE/HE = AB/CD = GF/HF$. Таким образом, $\angle GFE = \angle HFE$ или $\angle BPE = \angle CQE$.

Задача 8. Карлсон написал дробь 5/8. Малыш может:

- прибавлять любое натуральное число к числителю и знаменателю одновременно,
- умножать числитель и знаменатель на одно и то же натуральное число.

Сможет ли Малыш с помощью этих действий получить дробь, равную 3/5?

Ответ: Нет, не сможет.

Решение. Заметим, что при обоих разрешённых действиях дробь не уменьшается и всегда остается меньше единицы. Действительно, от второго действия величина дроби не меняется, осталось проверить первое действие. Пусть на некотором шаге имеется дробь a/b, где $a < b$. Мы из нее получаем дробь $\frac{a+k}{b+k}$, тогда $a + k < b + k$. Чтобы доказать неравенство $\frac{a}{b} < \frac{a+k}{b+k}$ просто перемножим крест-накрест, получив $a(b + k) < b(a + k)$, что равносильно $ak < bk$. Последнее неравенство очевидно следует из $a < b$.

Итак, дробь уменьшаться при действиях Малыша не может. Но исходная дробь 5/8 больше, чем 3/5. Значит, у Малыша не выйдет получить дробь, равную 3/5.