Вариант 4

Задача 1. Из соотношения $x_{n-1}=\dfrac{x_n+x_{n-1}+x_{n-2}}{3}$ получаем: $2x_{n-1}=x_{n-2}+x_n$ для всех $n\geq 3$. Это значит, что данная последовательность – арифметическая прогрессия. Пусть разность прогрессии равна d. Тогда $\dfrac{x_{300}-x_{33}}{x_{333}-x_3}=\dfrac{(300-33)d}{330d}=\dfrac{89}{110}$.

Ответ: $\dfrac{89}{110}$.

Задача 2. Среди данных чисел не более чем 44 числа могут быть не больше единицы, иначе условие задачи не выполнено. Возьмем 45 чисел, среди которых имеются все числа, которые не больше чем единица. Произведение взятых 45 чисел по условию больше единицы. Все прочие числа больше единицы. Их произведение тоже больше единицы. Следовательно, произведение всех чисел также больше единицы.

Задача 3. Пусть число N записано цифрами $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_1, a_0$, то есть

$$N=a_n\cdot 10^n+a_{n-1}\cdot 10^{n-1}+\ldots+a_1\cdot 10+a_0.$$

Вычтем из числа N сумму его цифр:

$$N-\left(a_n+a_{n-1}+\ldots+a_0\right)=\left(10^n-1\right)a_n+\left(10^{n-1}-1\right)a_{n-1}+\ldots+9a_1.$$

Числа вида 10^k-1 делятся на 9. Значит, число $N-\left(a_n+a_{n-1}+\ldots+a_0\right)$делится на 9. Следовательно, при делении на 9 каждое число дает тот же остаток, что и сумма его цифр.

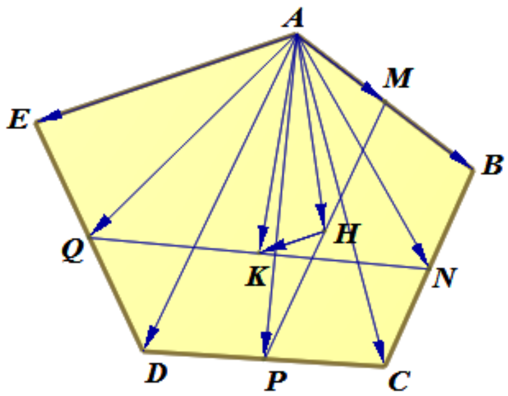
Пусть в записи числа A встречается n пятерок. Тогда троек там $n+11$, а все оставшиеся цифры – четверки. Сумма цифр равна

$$5\cdot n+3\cdot(n+11)+4\cdot\left(57-2n-11\right)=8n+33+184-8n=217.$$

В свою очередь, сумма цифр числа 217 равна 10. Остаток от деления 10 на 9 равен 1. Такой же остаток от деления на 9 имеет число 217 и, следовательно, число A.

Ответ: 1.

Задача 4. Используем векторы.



$$\overline{HK}=\overline{AK}-\overline{AH}=\frac{1}{2}\left(\overline{AQ}+\overline{AN}\right)-\frac{1}{2}\left(\overline{AM}+\overline{AP}\right)=$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\left(\overline{AE}+\overline{AD}\right)+\frac{1}{2}\left(\overline{AB}+\overline{AC}\right)\right)-$$

$$-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\overline{AB}+\frac{1}{2}\left(\overline{AC}+\overline{AD}\right)\right)=\frac{1}{4}\overline{AE}.$$

Значит, $AE=4HK=4{,}8$.

Ответ: 4,8.

Задача 5. Группируя слагаемые, получим: $(4y^2+1)(x^4+2x^2+2)=8|y|(x^2+1)$.

Очевидно, что при $y=0$ решений нет. Разделим обе части на $2|y|(x^2+1)$:

$$\left(2|y|+\frac{1}{2|y|}\right)\left(x^2+1+\frac{1}{x^2+1}\right)=4.$$

Известно[1] (легко показать), что если $a>0$, то $a+\dfrac{1}{a}\geq 2$, причем равенство достигается, только если $a=1$. Следовательно, правая часть равна 4, только если $2|y|=1$ и $x^2+1=1$.

Ответ: $(0, \frac{1}{2})$, $(0, -\frac{1}{2})$.

Задача 6. Предположим, что T – период функции $y=f(x)$. Из условия получаем:

$$\cos x = f(x)-2f(x-\pi)=f(x-T)-2f(x-T-\pi)=\cos(x-T).$$

Поскольку это равенство верно для всех x, число T является периодом функции $y=\cos x$, т.е. $T=2\pi n$, где n – некоторое натуральное число. Из данного уравнения получаем:

$$f(x)=2f(x-\pi)+\cos x=2\big(2f(x-2\pi)-\cos x\big)+\cos x=$$
$$=2\Big(2\big(2f(x-3\pi)+\cos x\big)-\cos x\Big)+\cos x=$$
$$=\ldots=2\Big(2\Big(\ldots\big(2f(x-2\pi n)-\cos x\big)+\ldots+\cos x\Big)-\cos x\Big)+\cos x=$$
$$=2^{2n}f(x)-\cos x\left(2^{2n-1}-2^{2n-2}+2^{2n-3}-\ldots+2-1\right).$$

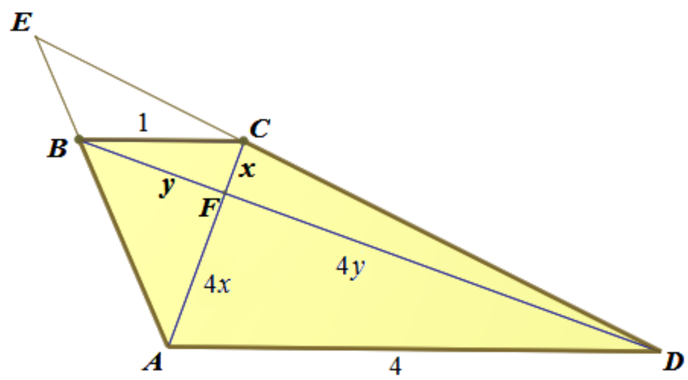
Тогда

$$f(x)\left(1-2^{2n}\right)=\cos x\left(1-2+2^2-\ldots-2^{2n-1}\right)=\cos x\frac{1-2^{2n}}{1+2}.$$

Следовательно, $f(x)=\dfrac{1}{3}\cos x$.

Ответ: $f(x)=\dfrac{1}{3}\cos x$.

Задача 7. Введем обозначения, как на рисунке. Продолжив боковые стороны, обозначим их точку пересечения буквой E. Точку пересечения диагоналей назовем F. Прямоугольные треугольники BFC и DFA подобны и, если обозначить катеты первого x и y, то соответственные катеты второго равны $4x$ и $4y$.



Высота трапеции h складывается из высот треугольников BFC и AFD:

$$h=\frac{BF\cdot FC}{1}+\frac{AF\cdot FD}{4}=xy+\frac{4x\cdot 4y}{4}=5xy.$$

Площадь трапеции равна $\dfrac{15}{16}$ площади треугольника AED. Получаем:

[1] Это утверждение является частным случаем неравенства Коши.

$$\frac{1}{2}AC\cdot BD=\frac{15}{16}\cdot\frac{1}{2}\cdot AE\cdot ED\cdot\sin 45^\circ=\frac{15\sqrt{2}}{64}\cdot\frac{4}{3}AB\cdot\frac{4}{3}CD=\frac{5\sqrt{2}}{12}AB\cdot CD\ ,$$

откуда $5xy=\frac{\sqrt{2}}{6}\sqrt{x^2+16y^2}\cdot\sqrt{y^2+16x^2}$.

Учитывая, что $x^2+y^2=1$, находим: $15\sqrt{2}xy=\sqrt{1+15y^2}\cdot\sqrt{1+15x^2}$.

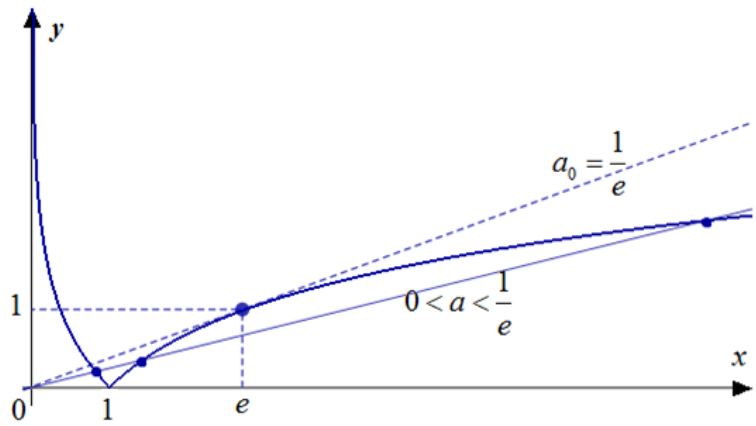
Проведем очевидные преобразования:

$$450x^2y^2=1+15\left(x^2+y^2\right)+225x^2y^2;\quad 225x^2y^2=16;\ 5xy=\frac{4}{3}.$$

Ответ: $\frac{4}{3}$.

Задача 8. Левая часть уравнения неотрицательна. Следовательно, $ax\ge 0$. При $a=0$ уравнение имеет два корня -1 и 1. Значит, $a=0$ не удовлетворяет условию.

Рассмотрим случай $a>0$. Тогда $x\ge 0$ и поэтому $|x|=x$. Построим график функции $y=|\ln x|$. Прямая $y=ax$ должна пересекать этот график в трех точках. На рисунке видно, что это выполняется тогда и только тогда, когда прямая проходит внутри угла, образованного осью абсцисс и касательной $y=a_0x$ к графику функции $y=\ln x$ при $x>1$.



Найдем a_0. Абсцисса точки касания удовлетворяет уравнениям $a_0x=\ln x,\ a_0=\frac{1}{x}$, откуда $a_0=\frac{1}{e}$, $x=e$. Таким образом, $0<a<\frac{1}{e}$.

Случай $a<0$ симметричен, то есть $-\frac{1}{e}<a<0$.

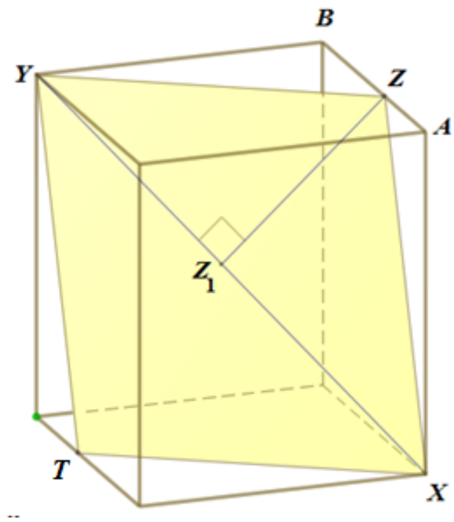
Ответ. $-\frac{1}{e}<a<0,\ 0<a<\frac{1}{e}$.

Задача 9. На четыре вопроса каждый рыцарь даёт один утвердительный ответ, а лжец – три. Всего было получено $109+98+104+119=430$ утвердительных ответов. Если бы все жители города были рыцарями, в сумме всех утвердительных ответов было бы 200. 230 лишних ответов «да» происходят от вранья лжецов. Таким образом, лжецов $\frac{230}{2}=115$.

Пусть в квартале Г живет k рыцарей, тогда $119-k$ – число утвердительных ответов на четвертый вопрос, которые дали лжецы. Значит число лжецов, живущих в квартале Г, равно $115-\left(119-k\right)=k-4$. В остальных кварталах число лжецов больше числа рыцарей.

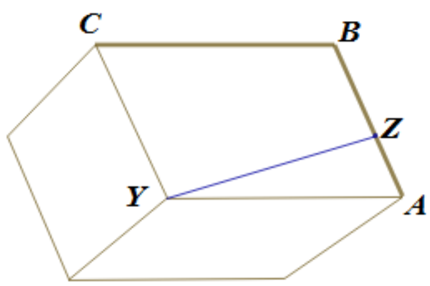
Ответ: в квартале Г, на 4 человека.

Задача 10. Сумма площадей поверхностей многогранников, на которые разбивается параллелепипед сечениями, равна сумме площади поверхности параллелепипеда и площадей внутренних поверхностей. Сумма площадей внутренних поверхностей равна удвоенной сумме площадей сечений.



Найдем наибольшую возможную площадь сечения, проходящего через диагональ XY произвольного параллелепипеда с ребрами $a \le b \le c$. Сечением является параллелограмм $ZXTY$, вершины которого лежат на противоположных ребрах параллелепипеда. Площадь параллелограмма равна произведению длины диагонали XY на расстояние от точки Z до XY.

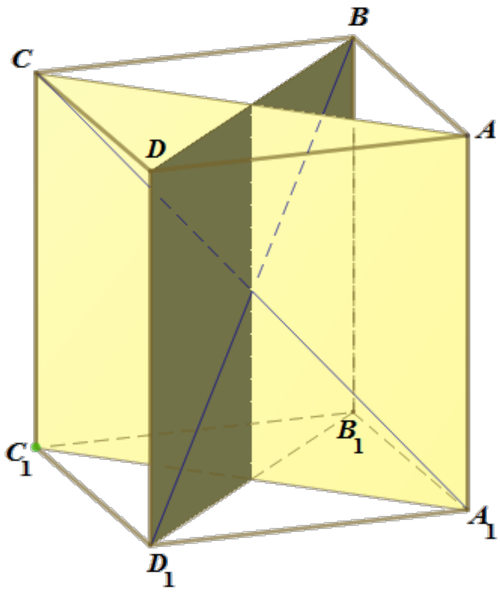
Рассмотрим проекцию параллелепипеда на плоскость, перпендикулярную диагонали XY. На рисунке видно, что расстояние от точки Z ломаной ABC до точки Y, то есть до диагонали XY, наибольшее, если Z совпадает с одной из вершин A, B или C.



Значит, сечение проходит через одно из ребер параллелепипеда. Таким образом, наибольшую площадь имеет одно из диагональных сечений. Все эти сечения являются прямоугольниками. Найдем наибольшую из их площадей

$$S_1 = a\sqrt{b^2 + c^2}\,,\ S_2 = b\sqrt{a^2 + c^2} \text{ и } S_3 = c\sqrt{b^2 + a^2}.$$

Из условия $a \le b \le c$ следует, что, $a^2b^2 + a^2c^2 \le c^2b^2 + a^2c^2$, и $a^2b^2 + c^2b^2 \le c^2b^2 + a^2c^2$. Поэтому $S_1 \le S_3$ и $S_2 \le S_3$. Значит, наибольшую площадь имеет сечение, проходящее через наибольшее ребро.



По условию задачи наибольшую длину имеет ребро AA_1, значит, наибольшую площадь, равную $10\sqrt{4^2 + 3^2} = 50$, имеют сечения AA_1C_1C и BB_1D_1D. Сумма площадей поверхностей многогранников, на которые разбивается параллелепипед этими сечениями (см. рисунок), равна

$$2(AA_1 \cdot AB + AA_1 \cdot AD + AB \cdot AD) + 4 \cdot 50 = 364.$$

Ответ: 364.