

**Условия, ответы и примерные критерии второй проверки**

Оценки (в порядке убывания): «+», «+», «±», «∓», «-», «-»; за задачу, к решению которой участник не приступал, ставилась оценка «0».

Решенной считалась задача, за которую была поставлена оценка «+», «+» или «±».

За *арифметическую* ошибку в верном решении ставилась оценка «±». За правильный, но необоснованный ответ (в частности, за правильный ответ, полученный рассмотрением частного случая) ставилась оценка «∓».

1. (Вариант 1) Десятичная запись натурального числа  $n$  содержит шестьдесят три цифры. Среди этих цифр есть двойки, тройки и четверки. Других цифр нет. Число двоек на 22 больше числа четверок. Найти остаток от деления  $n$  на 9.

**Ответ.** 5.

(Вариант 2) Десятичная запись натурального числа  $n$  содержит шестьдесят одну цифру. Среди этих цифр есть тройки, четверки и пятерки. Других цифр нет. Число троек на 11 больше числа пятерок. Найти остаток от деления  $n$  на 9.

**Ответ.** 8.

**Критерии.** «∓» Верный ответ получен рассмотрением частного случая.

2. В диване живут клопы и блохи. Боря лежит на диване и рассуждает: если клопов станет в несколько раз больше, то всего насекомых будет 2012, а если блох станет во столько же раз больше, а число клопов не изменится, то всего насекомых будет 2011. Сколько же насекомых живет в диване сейчас?

**Ответ.** 1341.

3. Перед испытательным пуском одного из агрегатов строящейся гидроэлектростанции выяснилось, что на расстоянии  $S$  км выше плотины находится рыбацкая сеть. Скорость течения реки составляет  $v$  км/ч. Работники гидроэлектростанции решили отправиться туда на катере. Снятие сети займет 5 минут. Какова должна быть собственная скорость катера, чтобы вся поездка (включая время, требуемое на снятие сети) заняла не более 45 минут?

**Ответ.**  $x \geq \frac{3S + \sqrt{9S^2 + 4v^2}}{2}$ .

**Критерии.** «+» Ответ  $x = \dots$  вместо  $x \geq \dots$ ; «±» ответ найден в других единицах измерениях; «∓» при верном решении не проведено сравнение корней квадратного уравнения с нулем, из-за чего возникает дополнительный кусок решения  $\left(0; \frac{3S - \sqrt{9S^2 + 4v^2}}{2}\right)$ .

4. Окружность проходит через вершины  $A$  и  $C$  треугольника  $ABC$ , пересекает сторону  $AB$  в точке  $E$  и сторону  $BC$  в точке  $F$ . Найдите радиус окружности, если  $AC = 6$ ,  $\angle AEC = 5\angle BAF$ ,  $\angle ABC = 72^\circ$ .

**Ответ.** 3.

5. (Вариант 1) Решите уравнение  $f(f(x)) = f(x)$ , где  $f(x) = \sqrt[5]{3 - x^3 - x}$ .

**Ответ.**  $x = 1$ .

(Вариант 2) Решите уравнение  $f(f(x)) = f(x)$ , где  $f(x) = 2^{-x^3 - x} - 5$ .

**Ответ.**  $x = -1$ .

**Критерии.** «∓» Найден верный ответ, но не доказано, что других корней нет (например, не обоснован переход от уравнения  $f(f(x)) = f(x)$  к  $f(x) = x$  или не доказано, что у уравнения  $t^4 + t^3 + 2t^2 + 2t + 1 = 0$  нет корней).

6. Найти сумму  $\frac{\sin \frac{\pi}{3}}{2} + \frac{\sin \frac{2\pi}{3}}{2^2} + \dots + \frac{\sin \frac{2010\pi}{3}}{2^{2010}}$ .

**Ответ.**  $\frac{\sqrt{3}}{3} \left(1 - \frac{1}{2^{2010}}\right)$ .

**Критерии.** «±» В верном решении суммы конечных геометрических прогрессий приближены суммами соответствующих бесконечных геометрических прогрессий (и получен ответ  $\approx \frac{\sqrt{3}}{3}$ ).

7. (Вариант 1) Вершины  $K, L, M, N$  четырехугольника  $KLMN$  лежат соответственно на сторонах  $AB, BC, CD, DA$  квадрата  $ABCD$ . Найти наименьший возможный периметр четырехугольника  $KLMN$ , если известно, что  $AK = 2$  см,  $BK = 4$  см и  $AN = ND$ .

**Ответ.**  $\sqrt{13} + \sqrt{181}$  см.

(Вариант 2) Вершины  $K, L, M, N$  четырехугольника  $KLMN$  лежат соответственно на сторонах  $AB, BC, CD, DA$  квадрата  $ABCD$ . Найти наименьший возможный периметр четырехугольника  $KLMN$ , если известно, что  $AK = 4$  см,  $BK = 10$  см и  $AN = ND$ .

**Ответ.**  $3\sqrt{113} + \sqrt{65}$  см.

8. (Вариант 1) Найти все решения системы 
$$\begin{cases} xy - t^2 = 9; \\ x^2 + y^2 + z^2 = 18. \end{cases}$$

**Ответ.**  $(3; 3; 0; 0), (-3; -3; 0; 0)$ .

(Вариант 2) Найти все  $x$ ,  $y$  и  $z$ , удовлетворяющие равенствам

$$\begin{cases} \log_2(x^2 + 1) + \log_2(y^2 + 1) = 4; \\ x^2 + y^2 = 2 \cos^2 z + 4. \end{cases}$$

**Ответ.**  $(\pm\sqrt{3}; \pm\sqrt{3}; \pi n), n \in \mathbb{Z}$ .

9. Один фермер сварил сыр в виде неправильной пятиугольной призмы, а другой — в виде правильной четырехугольной пирамиды, высота которой в 2 раза меньше стороны основания. Ночью мыши отъели от всех вершин этих многогранников все частицы сыра, которые находились на расстоянии не большем 1 см от соответствующей вершины. У съеденных кусков сыра не было общих частиц. Какой из фермеров понес больший ущерб и во сколько раз?

**Ответ.** Ущерб первого фермера больше в 4,5 раза.

**Критерии.** « $\pm$ » Верно подсчитан объем хотя бы одной из двух съеденных частей.

10. Изобразить на координатной плоскости множество точек  $(a, b)$

таких, что система уравнений 
$$\begin{cases} x^2 + y^2 = a^2, \\ x + y = b \end{cases}$$
 имеет хотя бы одно

решение.

**Ответ.**  $|b| \leq \sqrt{2}|a|$ .

**Критерии.** « $\pm$ » верно найдено множество параметров  $a$  и  $b$ , но на координатной плоскости оно не изображено; « $\mp$ » ответ верен для  $a > 0$ , но не для  $a < 0$ .